Devoir d'entraînement

Exercice 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

(b) Déterminer une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et des réels λ et μ tels que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$.

(c) Résoudre le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ et $X(0) = X_0$.

(d) Tracer la courbe paramétrée d'équation

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \exp(\lambda t) \\ y(t) = y_0 \exp(\mu t) \end{cases}$$

On distinguera les cas selon le signe de x_0 et y_0 et on indiquera le sens de parcours de la courbe dans chaque cas.

(e) Tracer l'allure du portrait de phase associé à l'équation $X'(t) = AX(t)$.

(f) Montrer que l'origine est le seul point d'équilibre de $X'(t) = AX(t)$. Est-il asymptotiquement stable ? Est-il stable au sens de Lyapunov ? Justifier la réponse.

Exercice 2 On considère l'équation suivante

$$y' + y^2 - 4y + 4 = 0.$$

(a) Mettre cette équation sous la forme $y' = f(t, y)$ en précisant la fonction f et son domaine de définition. Est-qu'elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

(b) Que dire d'une solution qui prend la valeur 2 ?

(c) Résoudre l'équation avec condition initale $y(0) = y_0$. On précisera l'intervalle de définition maximal de la solution.

Exercice 3 On considère le champ de vecteurs $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (y, x^2 - 1)$.

(a) Déterminer les solutions stationnaires de l'équation différentielle $X'(t) = b(X(t))$.

(b) Montrer que la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x - \frac{3}{2}y^2$ est constante le long des solutions de $X'(t) = b(X(t))$.

(c) On s'intéresse à la solution de condition initiale $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

   (i) Tracer l'allure de la courbe $y^2 = \frac{3}{2}x^3 - 3x$ et remarquer qu'elle possède deux composantes, l'une bornée et l'autre comportant une branche infinie.

   (ii) Justifier que cette solution est périodique.