Licence Mathématiques 2e année | Sorbonne Université
2M310 Équations différentielles | 2017-2018

# TD 5 - Équations différentielles non linéaires : généralités

**Exercice 1** Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations différentielles ordinaires (EDO) suivantes avec donnée initiale $y(t_0) = y_0$, et donner l'intervalle maximal d'existence.

(a) $y'(t) = |y(t)|$,

(b) $y'(t) = y^2(t)$,

(c) $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$,

(d) $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$,

(e) $y'(t) + \exp(y(t)) = 0$,

(f) $y'(t) = 1 + y^2(t)$.

**Exercice 2** On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + y^3(t) = 0 \quad (E)$$

munie des conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.

1. Écrire l'équation $(E)$ sous la forme d'un système différentiel $X' = b(X) \quad (S)$ avec la condition initiale $X(0) = X_0$ où $b$ est un champ de vecteur de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ que l'on explicitera.
2. Montrer que le système $(S)$ possède une unique solution maximale sur un intervalle ouvert $I$ contenant 0. En déduire qu'il en est de même pour l'équation $(E)$.
3. Soit $y$ une solution de $(E)$. Montrer que la quantité $E(t) = y'(t)^2 + \dfrac{y(t)^4}{2}$ est constante pour $t \in I$.
4. Soit $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que $\forall t \in I, \|X(t)\|_2 \leqslant C$.
5. En déduire que l'intervalle de définition $I$ est égal à $\mathbf{R}$.

**Exercice 3** On considère l'équation différentielle $y'(t) = t^2 + y^2(t)$.

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale $y$ vérifiant $y(0) = 0$. Dans toute la suite, on note $I$ l'intervalle de définition de $y$.
2. Montrer que $y$ est impaire.
3. Montrer que $y$ est croissante. En déduire le signe de $y$ sur $I \cap \mathbb{R}_+$.
4. Montrer que $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ et que $y$ est convexe sur $I \cap \mathbb{R}_+$.
5. En utilisant l'inégalité $y'(t) \geq y(t)^2$ pour tout $t \in I$, montrer que $y$ est définie sur un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}$ sur cet intervalle.