TD 4 - Systèmes différentiels linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

(a) $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 6y(t), \\ y'(t) = 3x(t) - 4y(t). \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t). \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t). \end{cases}$

Exercice 2 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

(a) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t), \\ y'(t) = 3y(t), \\ z'(t) = y(t) + z(t). \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = (2-t)x(t) + (t-1)y(t), \\ y'(t) = 2(1-t)x(t) + (2t-1)y(t). \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + \cos t - \sin t, \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) + \sin t. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + \exp t, \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$

Exercice 3 *Méthode de variation des constantes*

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constant

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \qquad (E)$$

où f est une fonction continue. On suppose que $a^2 - 4b > 0$.

(a) Écrire la méthode de variation des constantes afin d'exprimer les solutions générale de (E).

(b) Écrire le système différentiel (S) correspondant à (E).

(c) Faire la lien entre la méthode de variation des constantes pour (E) et pour (S).

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On considère l'équation différentielle scalaire du second ordre

$$x''(t) - x(t) = f(t).$$

(a) Montrer que cette équation admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) Appliquer la méthode de variation de la constante. En déduire que toute solution s'écrit $x(t) = ae^t + be^{-t} + \int_0^t \sinh(t-s)f(s)ds$.

Exercice 5 Tracer les portraits de phases et étudier la stabilité des sysèmes différentiels de l'exercice 1.