

TD 3 - Équations différentielles d'ordre 1 et 2

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

- (a) $(1 + t^2)x'(t) - tx(t) = 3t$,
- (b) $(1 + t^2)x'(t) = tx(t) + 2t^2$,
- (c) $x'(t) = x(t) \tan t + 2 \cos t - \frac{1}{(\cos t)}$,
- (d) $2t(1 - t)x'(t) + (1 - t)x(t) = 1$.

Exercice 2 Pour les équations différentielles suivantes, écrire les schémas d'Euler explicite et Euler implicite. Considérer l'intervalle $[0, T]$, la condition initiale $x(t = 0) = x_0$, et le paramètre $p \in \mathbf{N}^*$ de discrétisation, donc le pas $h = T/p$. Écrire aussi la solution exacte aux temps multiples de h .

- (a) $x'(t) = b(t)$ avec $b \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$,
- (b) $x'(t) = ax(t)$ avec $a \in \mathbf{R}^*$,
- (c) $x'(t) = a(t)x(t)$ avec $a \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$,
- (d) $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ avec a et b dans $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes :

- (a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$,
- (b) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \exp(t)$,
- (c) $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \sin(t)$,
- (d) $y''(t) + y(t) = 2 \cos^2(t)$,
- (e) $y''(t) + y(t) = \sinh(t)$,
- (f) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2 \cosh(t)$.

Exercice 4 (a) Donner la solution générale de l'équation différentielle $x''(t) + 4x(t) = \cos(2t)$. Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \rightarrow \infty$?

(b) Soit $a \in]0, 4[$. Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) + ax'(t) + 4x(t) = \cos(2t).$$

- (c) Déterminer la solution de (E) pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1/a$.
- (d) Déterminer le maximum M_a de cette solution pour $t \geq 0$ en fonction de a .
- (e) Quelle est la limite de M_a lorsque a tend vers 0 ?