TD 1 - Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Exercice 1 Tracer les courbes paramétrées suivantes :

(a) $x(t) = \cos(3t)$ et $y(t) = \sin(2t)$.

(b) $x(t) = \frac{1}{t}$ et $y(t) = \frac{t^3+2}{t}$.

(c) $x(t) = \exp(t)$ et $y(t) = t^2$.

(d) $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$.

(e) $x(t) = (t+1)e^{\frac{1}{t^2-1}}$ et $y(t) = (t-1)e^{\frac{1}{t^2-1}}$.

(f) $x(t) = \tan t + \sin t$ et $y(t) = \frac{1}{\cos t}$.

Exercice 2 Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \exp(\lambda_1 t), \\ y(t) = y_0 \exp(\lambda_2 t). \end{cases}$$

Discuter selon les valeurs de λ_1 et λ_2.

Exercice 3 Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + \alpha t y_0) \exp(\lambda t), \\ y(t) = y_0 \exp(\lambda t). \end{cases}$$

Discuter selon les valeurs de α et λ.

Exercice 4 *Branches paraboliques.*

(a) Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(t-1)^2}{t}, \\ y(t) = \frac{(t-1)^3}{t^2}. \end{cases}$$

Vérifier qu'elle possède une branche parabolique et que celle-ci est asymptote à la parabole d'équation $y = -x^2 - x + 1$.

(b) Montrer que la courbe $t \mapsto (t, t^3)$ possède une branche parabolique mais qu'elle n'est asymptote à aucune parabole.

Exercice 5 *L'astroïde.*
Soit a un réel strictement positif. Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, \\ y(t) = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Remarque : cette courbe présente des points singuliers ($x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$)

Exercice 6 *La tractrice.*
Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = t - \tanh t, \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t}. \end{cases}$$

Remarque : cette courbe présente des points singuliers ($x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$).